Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques - Groupement B

Session 2023 • Code sujet : **23MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 en Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Fermeture d’un tiroir : équation différentielle et étude de fonction (12 questions) **Page 3**

2. Séries de Fourier d’une fonction paire périodique (10 questions) **Page 7**

3. Ce qu’il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://coursbtsccst.fr/assets/annales/bts-ccst/E2 - Mathématiques/2023/BTS CCST - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf

1. Fermeture d'un tiroir : équation différentielle et étude de fonction

La distance entre le fond du tiroir et celui du meuble est modélisée par une fonction f du temps, exprimée en centimètres. L'exercice étudie le mouvement par une équation différentielle puis par une fonction exponentielle, et demande notamment d'interpréter le temps de fermeture et la position moyenne.

Partie A

Question 1.a. Résoudre l'équation caractéristique r² + 5r + 4 = 0.

On factorise le trinôme : $r^2 + 5r + 4 = (r + 1)(r + 4)$. Le produit est nul si l'un de ses facteurs est nul.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $r = -1$ ou $r = -4$.

Question 1.b. Résoudre l'équation différentielle (E₀) : y'' + 5y' + 4y = 0, à l'aide du tableau fourni.

L'équation caractéristique a deux racines réelles distinctes, -1 et -4. D'après le tableau fourni, les solutions de l'équation différentielle sont les combinaisons linéaires des exponentielles associées à ces racines.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t}$, avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Question 2.a. À partir de la situation initiale, où M se trouve à 20 cm de O et se déplace vers O à la vitesse de -10 cm·s⁻¹, déterminer f(0) et f'(0).

La fonction f représente la distance OM, donc sa valeur initiale est la distance donnée. Sa dérivée représente la vitesse de cette distance. Le signe négatif traduit le rapprochement de M vers O.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(0) = 20$ cm et $f'(0) = -10$ cm·s^{-1}.

Question 2.b. En admettant que f(t) = (70/3)e⁻ᵗ - (10/3)e⁻⁴ᵗ, déterminer la valeur exacte de la distance OM deux secondes après le début de la fermeture.

On remplace t par 2 dans l'expression de f : $f(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}$. Cette expression exacte donne la distance OM après deux secondes.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}$ cm.

Question 2.c. **Le tiroir est considéré fermé lorsque OM est inférieure à 0,5 cm. Déterminer si le constructeur a raison d'affirmer que le tiroir est fermé en moins de 4 secondes, et justifier.**

La distance diminue sur $[0;+\infty[$, car $f'(t) = \frac{-70e^{-t}+40e^{-4t}}{3} < 0$ pour $t \geq 0$. À 4 secondes, $f(4) = \frac{70}{3}e^{-4} - \frac{10}{3}e^{-16} \approx 0,427$ cm, valeur inférieure à 0,5 cm. Le seuil est donc atteint avant 4 secondes.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Oui, le constructeur a raison : le tiroir est fermé en moins de 4 secondes.

Partie B

Question 1.a. **Sachant que lim(e⁻ᵘ) = 0 lorsque u tend vers +∞, déterminer la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞.**

Quand t tend vers $+\infty$, les deux exponentielles e^{-t} et e^{-4t} tendent vers 0. Leur combinaison linéaire tend donc également vers 0.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$.

Question 1.b. **En déduire que la courbe représentative de f possède une asymptote et en donner une équation.**

Comme $f(t)$ tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$, sa courbe admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$, qui est l'axe des abscisses.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Asymptote horizontale : $y = 0$.

Question 2.a. **Déterminer l'expression de f'(t) pour tout t appartenant à [0 ; +∞[.**

On dérive chaque exponentielle avec la règle $(e^{at})' = ae^{at}$: $\left(\frac{70}{3}e^{-t}\right)' = -\frac{70}{3}e^{-t}$ et $\left(-\frac{10}{3}e^{-4t}\right)' = \frac{40}{3}e^{-4t}$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f'(t) = -\dfrac{70}{3}e^{-t} + \dfrac{40}{3}e^{-4t}$.

Question 2.b. En admettant que f'(t) < 0 sur [0 ; +∞[, dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle.

Sur l'intervalle considéré, $f'(t) < 0$, donc f est strictement décroissante. De plus, $f(0) = 20$ et $\lim_{t \to +\infty} f(t) = 0$.

t	**0**	$+\infty$
Signe de $f'(t)$	$-$	
Variation de f	20	$\searrow$ 0

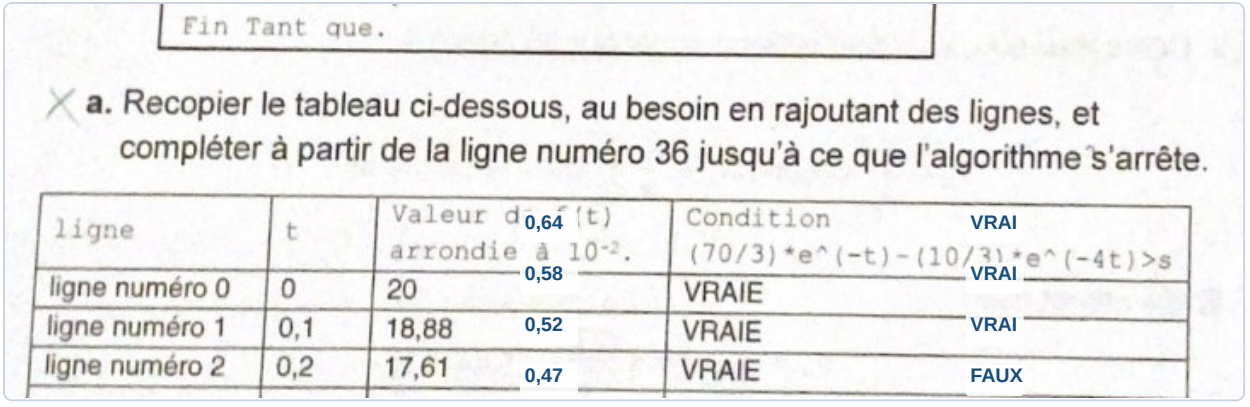
> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> f décroît de 20 à 0 sur $[0; +\infty[$.

Question 3.a. Compléter le tableau de suivi de l'algorithme à partir de la ligne 36, en indiquant t, la valeur de f(t) arrondie au 10^{-2} et le résultat du test, jusqu'à l'arrêt de l'algorithme.

À chaque ligne, t augmente de 0,1. Le test porte sur la valeur non arrondie de $f(t)$, tandis que la colonne du tableau affiche l'arrondi au centième. À 3,8 s, le test est encore vrai ; à 3,9 s, il devient faux et la boucle s'arrête.

Ligne	t	$f(t)$ **arrondie au** 10^{-2}	**Test** $f(t) > 0,5$
36	3,6	0,64	VRAI
37	3,7	0,58	VRAI
38	3,8	0,52	VRAI
39	3,9	0,47	FAUX

Tableau de suivi complété


Fin Tant que.

a. Recopier le tableau ci-dessous, au besoin en rajoutant des lignes, et compléter à partir de la ligne numéro 36 jusqu'à ce que l'algorithme s'arrête.

ligne	t	Valeur de f(t) arrondie à 10^{-2}.	Condition (70/3)*e^(-t)-(10/3)*e^(-4t)>s
ligne numéro 0	0	20	VRAIE
ligne numéro 1	0,1	18,88	VRAIE
ligne numéro 2	0,2	17,61	VRAIE

0,64 VRAI
0,58 VRAI
0,52 VRAI
0,47 FAUX

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> À la ligne 39 : $t = 3,9$, $f(t)$ arrondie vaut 0,47 et le test est FAUX.

Question 3.b. Donner la valeur de la variable t à la fin de l'exécution de l'algorithme et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

À 3,8 s, $f(t) \approx 0,52 > 0,5$, donc la boucle continue. Après l'incrément, à 3,9 s, $f(t) \approx 0,47 < 0,5$: la condition devient fausse et l'algorithme s'arrête. Le temps final correspond au premier dixième de seconde testé où la distance est sous le seuil.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $t = 3,9$ s : le tiroir est fermé selon le critère donné.

Question 4. La position moyenne du tiroir est définie par m = (1/4)∫₀⁴ f(t)dt. Démontrer que m = 45/8 - (35/6)e⁻⁴ + (5/24)e⁻¹⁶.

Une primitive de f est $-\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{5}{6}e^{-4t}$. Ainsi, $m = \frac{1}{4}\left[-\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{5}{6}e^{-4t}\right]_0^4 = \frac{1}{4}\left(\frac{45}{2} - \frac{70}{3}e^{-4} + \frac{5}{6}e^{-16}\right)$. En distribuant le facteur $\frac{1}{4}$, on obtient l'expression demandée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $m = \dfrac{45}{8} - \dfrac{35}{6}e^{-4} + \dfrac{5}{24}e^{-16}$ cm.

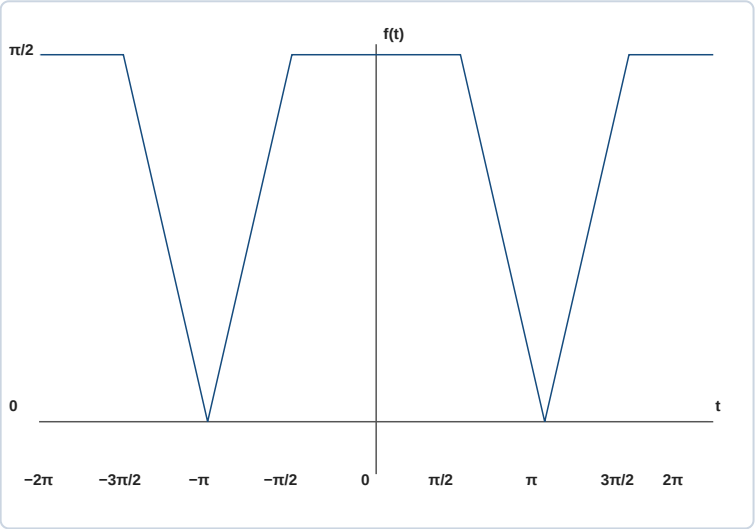
2. Séries de Fourier d'une fonction paire périodique

L'exercice étudie une fonction paire de période 2π, définie par morceaux sur [0 ; π]. Il mobilise la représentation graphique, le calcul des coefficients et l'analyse d'une somme partielle de Fourier, avec un formulaire fourni à la fin du sujet.

Question 1. Sur le document-réponse, tracer la représentation graphique de f sur l'intervalle [-2π ; 2π].

La fonction est paire et de période 2π. Sur chaque période, elle reste égale à $\pi/2$ autour d'un multiple de 2π, puis rejoint linéairement la valeur 0 au multiple impair de π le plus proche. Le tracé montre donc des minima en $-\pi$ et π, et des plateaux de hauteur $\pi/2$ autour de -2π, 0 et 2π.

Représentation de f sur [−2π ; 2π]



✓ RÉPONSE À RETENIR

Courbe paire et périodique de période 2π, avec $f(2k\pi) = \pi/2$ et $f((2k+1)\pi) = 0$.

Question 2. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, le coefficient de Fourier b_n est nul.

La formule de Fourier donne $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt$, puisque $T = 2\pi$. La fonction f est paire, tandis que $t \mapsto \sin(nt)$ est impaire. Leur produit est donc impair. Son intégrale sur l'intervalle symétrique $[-\pi;\pi]$ est nulle, ce qui établit le résultat pour tout entier $n \geq 1$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Pour tout entier $n \geq 1$, $b_n = 0$.

Question 3. Déterminer la pulsation ω associée à la fonction f.

La pulsation d'une fonction périodique de période T est $\omega = \frac{2\pi}{T}$. La période indiquée dans l'énoncé est $T = 2\pi$. On obtient donc $\omega = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$, en radians par unité de la variable t.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\omega = 1$ radian par unité de t.

Question 4. Démontrer que le coefficient de Fourier a₀ est égal à 3π/8.

Sur $[0;\pi]$, l'aire sous la courbe est celle d'un rectangle de dimensions $\pi/2$ et $\pi/2$, additionnée à celle d'un triangle de base et de hauteur $\pi/2$. Elle vaut donc $\frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^2}{8} = \frac{3\pi^2}{8}$. Par parité, l'intégrale sur une période vaut $\frac{3\pi^2}{4}$. Ainsi, $a_0 = \frac{1}{2\pi} \times \frac{3\pi^2}{4} = \frac{3\pi}{8}$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$a_0 = \frac{3\pi}{8}$.

Question 5. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, aₙ = ∫₀^(π/2) cos(nt)dt + (2/π)∫_(π/2)^π (π - t)cos(nt)dt.

Comme f est paire, le formulaire donne, pour $n \geq 1$, $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt$. Sur $[0;\pi/2[$, $f(t) = \pi/2$, et sur $[\pi/2;\pi]$, $f(t) = \pi - t$. En séparant l'intégrale à $\pi/2$, puis en simplifiant $\frac{2}{\pi} \times \frac{\pi}{2} = 1$, on obtient l'égalité demandée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$a_n = \int_0^{\pi/2} \cos(nt)\,dt + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - t)\cos(nt)\,dt$.

Question 6. En admettant que aₙ = 2/(πn²)(cos(nπ/2) - cos(nπ)), déterminer les valeurs exactes de a₁, a₂ et a₃.

On applique la formule admise $a_n = \frac{2}{\pi n^2}\left(\cos(\frac{n\pi}{2}) - \cos(n\pi)\right)$. Pour $n = 1$, les cosinus valent 0 et -1, donnant $a_1 = 2/\pi$. Pour $n = 2$, ils valent -1 et 1, donnant $a_2 = -1/\pi$. Pour $n = 3$, ils valent 0 et -1, donnant $a_3 = 2/(9\pi)$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$a_1 = \frac{2}{\pi}$, $\quad a_2 = -\frac{1}{\pi}$, $\quad a_3 = \frac{2}{9\pi}$.

Question 7. À partir des coefficients obtenus, déduire l'expression de la somme partielle s₃(t) = 3π/8 + (2/π)cos(t) - (1/π)cos(2t) + (2/(9π))cos(3t).

La somme partielle d'ordre 3 est $s_3(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{3} a_n \cos(nt)$, car les coefficients b_n sont nuls. En y remplaçant a_0 par $3\pi/8$, puis a_1, a_2 et a_3 par les valeurs déterminées à la question précédente, on obtient l'expression ci-dessous.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$s_3(t) = \frac{3\pi}{8} + \frac{2}{\pi}\cos(t) - \frac{1}{\pi}\cos(2t) + \frac{2}{9\pi}\cos(3t)$.

Question 8. Indiquer, sans justification, laquelle des trois courbes représentées correspond à la fonction s_3.

La somme partielle obtenue est paire et présente des creux arrondis autour de $t = -\pi$ et $t = \pi$, là où la fonction périodique atteint ses minima. Parmi les trois tracés fournis, ces caractéristiques correspondent à la courbe numéro 3.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Courbe numéro 3.

Question 9.a. Pour $P = (a_0)^2 + 1/2[(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2]$, donner une valeur approchée de P à 10^{-4} près.

En utilisant les valeurs exactes des quatre coefficients, on obtient $P = \left(\frac{3\pi}{8}\right)^2 + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{2}{9\pi}\right)^2\right]$. Cette expression vaut environ $1{,}6437178$. L'arrondi au 10^{-4} près est donc $1{,}6437$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P \approx 1{,}6437$.

Question 9.b. Sachant que $F^2 = \pi^2/6$ et que P constitue une approximation de F^2, choisir parmi 0,1 %, 1 % et 10 % le pourcentage d'erreur de cette approximation. Une seule réponse est attendue et aucune justification n'est demandée.

Le pourcentage d'erreur relative est $\frac{|F^2 - P|}{F^2} \times 100$. Avec $F^2 = \pi^2/6$ et $P \approx 1{,}6437$, il est d'environ $0{,}074\,\%$. Parmi les trois choix proposés, la valeur correspondante est 0,1 %.

✓ RÉPONSE À RETENIR

0,1 %.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

Bilan de l'épreuve : L'épreuve de mathématiques du BTS Groupement B, session 2023, code 23MATGRB2, dure 2 heures. Le coefficient est de 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en Électrotechnique. Les deux exercices, notés chacun sur 10 points, portent sur la fermeture d'un tiroir modélisée par une fonction exponentielle et sur les séries de Fourier d'une fonction paire périodique.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour y'' + 5y' + 4y = 0, l'équation caractéristique associée est $r^2 + 5r + 4 = 0$.
- La dérivée de e^(at) est a·e^(at), ce qui permet de dériver chaque terme de la fonction du tiroir.
- Pour une fonction de période T, la pulsation vaut $\omega = 2\pi/T$.
- Pour une fonction paire, $b_n = 0$ et $a_n = (4/T)\int_0^{(T/2)} f(t)\cos(n\omega t)dt$.

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter le signe de la vitesse initiale et distinguer la distance en centimètres du temps en secondes.
- Pour la boucle « Tant que », évaluer la condition à chaque valeur de t et identifier le premier test faux.
- Utiliser la parité et la périodicité pour tracer correctement f sur $[-2\pi ; 2\pi]$.
- Pour l'erreur, comparer P à F^2, comme indiqué, puis retenir une seule proposition du QCM.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment relier l'équation différentielle à son équation caractéristique ?

À l'équation différentielle homogène y'' + 5y' + 4y = 0, on associe $r^2 + 5r + 4 = 0$. Les racines de cette équation déterminent la forme de la solution générale de l'équation différentielle.

Q : Pourquoi les coefficients b_n sont-ils nuls dans l'exercice sur Fourier ?

La fonction f est paire et sin(nt) est impaire. Leur produit est donc impair, et l'intégrale de ce produit sur un intervalle symétrique est nulle, ce qui donne $b_n = 0$.

Q : Comment suivre correctement la boucle « Tant que » de l'exercice ?

Partir de t = 0 et augmenter t de 0,1 tant que f(t) > 0,5. Tester la condition à chaque étape : l'algorithme s'arrête dès qu'elle devient fausse, et la valeur finale de t doit être interprétée comme un temps en secondes.

Q : Quelles exigences de présentation ou de justification faut-il retenir ?

Les questions qui demandent de démontrer nécessitent une démarche justifiée. En revanche, le choix de la courbe pour s_3 et la réponse au QCM sur l'erreur ne demandent aucune justification ; le QCM attend une seule proposition.

Sujet officiel associé (PDF) : https://coursbtsccst.fr/assets/annales/bts-ccst/E2 - Mathématiques/2023/BTS CCST - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf

Ressources BTS Conseil et Commercialisation de Solutions Techniques : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.