Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques - BTS Groupement D1

Session 2022 • Code sujet : **22-MATGRD1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **Analyses de biologie médicale : 1 ; Bio analyses et contrôles : 2 ; Biotechnologies : 1 ; Europlastics et composites : 1,5 ; Bioqualité : 2**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Modélisation de l'évolution du nombre de personnes équipées d'un implant médical (13 questions) **Page 3**

2. Approvisionnement, pannes et qualité de l'embouteillement (9 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://coursbtsccst.fr/assets/annales/bts-ccst/E2 - Mathématiques/2022/BTS CCST - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 3-Sujet.pdf

1. Modélisation de l'évolution du nombre de personnes équipées d'un implant médical

Dans un pays de 60 millions d'habitants, des données annuelles depuis 2013 décrivent le nombre de personnes équipées d'un implant médical. Deux modèles sont étudiés : un ajustement exponentiel par changement de variable, puis une fonction obtenue à partir d'une équation différentielle.

Partie A

Question 1. Compléter le tableau de l'annexe à rendre avec la copie en calculant les valeurs de y = ln(N - 30), arrondies au millième.

Année	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
Rang k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$y = \ln(N - 30)$	3,268	3,336	3,418	3,497	3,578	3,656	3,738	3,818	3,898

Pour chaque valeur de N, exprimée en milliers, on calcule d'abord $N - 30$, puis son logarithme népérien. Par exemple, pour 2013 : $y = \ln(56,25 - 30) \approx 3,268$. Les neuf valeurs sont arrondies au millième, conformément à la consigne.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Pour 2013 à 2021, les valeurs de y sont : 3,268 ; 3,336 ; 3,418 ; 3,497 ; 3,578 ; 3,656 ; 3,738 ; 3,818 ; 3,898.

Question 2.a. À l'aide de la calculatrice, déterminer par la méthode des moindres carrés une équation de la droite d'ajustement du nuage de points $M_i(k_i ; y_i)$, sous la forme y = ak + b, avec a et b arrondis au centième.

On utilise les neuf points de coordonnées $(k_i ; y_i)$, avec les rangs de 0 à 8 et les valeurs de y_i calculées précédemment. La régression linéaire par la méthode des moindres carrés donne une pente proche de 0,079 et une ordonnée à l'origine proche de 3,261. Après arrondi au centième de chacun des coefficients, on obtient l'équation demandée.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> La droite d'ajustement, avec ses coefficients arrondis au centième, est $y = 0,08k + 3,26$.

Question 2.b. À partir de l'équation de droite obtenue, déduire que le nombre de personnes équipées, exprimé en milliers et en fonction du rang k, peut être modélisé par N(k) = 30 + 26,05e^(0,08k).

1. Comme $y = \ln(N - 30)$, la droite ajustée donne $\ln(N - 30) = 0,08k + 3,26$.
2. En exponentiant, $N - 30 = e^{3,26}e^{0,08k}$.

3. Or $e^{3,26} \approx 26,05$. Ainsi, le modèle obtenu est bien exprimé en milliers de personnes et correspond à la forme indiquée dans le sujet.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Le modèle exponentiel est $N(k) = 30 + 26,05e^{0,08k}$, avec $N(k)$ exprimé en milliers de personnes.

Question 3.a. **En supposant que le modèle proposé reste valide, déterminer au millier près le nombre de personnes équipées de l'implant médical en 2026.**

Le rang correspondant à 2026 est $k = 2026 - 2013 = 13$. On remplace ce rang dans le modèle : $N(13) = 30 + 26,05e^{0,08\times 13} \approx 103,7$. La valeur obtenue est en milliers de personnes. Arrondie au millier près, elle donne le nombre de personnes équipées attendu en 2026 selon ce modèle.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Le modèle prévoit environ 104 000 personnes équipées en 2026, au millier près.

Question 3.b. **En supposant que le nombre d'habitants du pays reste stable sur le long terme, déterminer si le modèle reste valide à long terme et justifier la réponse.**

Quand k tend vers $+\infty$, le terme $e^{0,08k}$ tend vers $+\infty$. Le modèle prévoit donc un nombre de personnes équipées qui augmente sans limite. Or la population du pays est supposée stable à 60 millions : cet effectif ne peut pas dépasser le nombre d'habitants. Le modèle finit donc par donner une prévision impossible et ne peut pas rester valide à long terme.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non. À long terme, le modèle prédit plus de personnes équipées que les 60 millions d'habitants du pays.

Partie B

Question 1.a. **Résoudre sur [0, +∞[l'équation différentielle homogène (E_0) : y′ + 0,05y = 0.**

L'équation homogène $y' + 0,05y = 0$ est une équation différentielle linéaire du premier ordre. Ses solutions sont de la forme $y(t) = Ce^{-0,05t}$, où C est une constante réelle. En effet, la dérivée vaut $y'(t) = -0,05Ce^{-0,05t}$, donc $y' + 0,05y = 0$. Cette expression définit les solutions sur l'intervalle demandé.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Sur $[0, +\infty[$, les solutions sont $y(t) = Ce^{-0,05t}$, où $C \in \mathbb{R}$.

Question 1.b. **Déterminer une solution constante de l'équation différentielle (E) : y' + 0,05y = 0,05.**

On cherche une solution constante sous la forme $y(t) = c$. Sa dérivée est nulle. En remplaçant dans $y' + 0,05y = 0,05$, on obtient $0,05c = 0,05$, donc $c = 1$. La fonction constante égale à 1 est ainsi une solution particulière de l'équation sur l'intervalle considéré.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Une solution constante de l'équation (E) est $y(t) = 1$.

Question 1.c. **Résoudre sur [0, +∞[l'équation différentielle (E) : y' + 0,05y = 0,05.**

La solution générale de l'équation homogène associée est $Ce^{-0,05t}$. Une solution particulière de l'équation complète est la constante 1, puisque $0 + 0,05 \times 1 = 0,05$. Toute solution de l'équation complète est la somme de cette solution particulière et d'une solution de l'équation homogène. On obtient ainsi l'ensemble des solutions sur $[0, +\infty[$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Les solutions de (E) sur $[0, +\infty[$ sont $y(t) = 1 + Ce^{-0,05t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 1.d. **En utilisant la condition g(0) = 8, déterminer une expression de la fonction g sur [0, +∞[.**

La solution générale trouvée à la question précédente est $g(t) = 1 + Ce^{-0,05t}$. À $t = 0$, on a $e^0 = 1$, donc la condition initiale devient $g(0) = 1 + C = 8$. Ainsi, $C = 7$. En remplaçant la constante par cette valeur, on obtient l'expression de la fonction g sur l'intervalle demandé.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La fonction vérifiant $g(0) = 8$ est $g(t) = 1 + 7e^{-0,05t}$ sur $[0, +\infty[$.

Question 2. **Avec le modèle f(t) = 450/(1 + 7e^(-0,05t)), où t désigne le nombre d'années depuis 2013 et f(t) le nombre de personnes équipées en milliers, déterminer au millier près combien de personnes seront équipées en 2026.**

En 2026, le temps écoulé depuis 2013 est $t = 2026 - 2013 = 13$ ans. On évalue alors le modèle : $f(13) = \frac{450}{1+7e^{-0,05\times 13}} \approx 96,7$. La valeur de f est exprimée en milliers de personnes. On convertit donc ce résultat en personnes, puis on l'arrondit au millier près comme demandé.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Selon le modèle de la partie B, environ 97 000 personnes seront équipées en 2026, au millier près.

Question 3. Déterminer la limite de f en +∞ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Quand t tend vers $+\infty$, $e^{-0{,}05t}$ tend vers 0. Le dénominateur $1 + 7e^{-0{,}05t}$ tend donc vers 1, tandis que le numérateur reste égal à 450. Ainsi, $f(t)$ tend vers 450. Comme $f(t)$ est exprimée en milliers de personnes, cette limite représente 450 000 personnes équipées selon le modèle.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 450$, soit 450 000 personnes équipées à long terme selon ce modèle.

Question 4. À partir de l'expression fournie de f'(t), déduire le sens de variation de f sur [0, +∞[et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Pour tout $t \geq 0$, l'expression fournie est $f'(t) = \frac{315e^{-0{,}05t}}{2(1+7e^{-0{,}05t})^2}$. L'exponentielle est strictement positive et le dénominateur, qui est au carré et multiplié par 2, est strictement positif. Le numérateur est donc positif, d'où $f'(t) > 0$ sur l'intervalle considéré. La fonction est ainsi strictement croissante.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> La fonction f est strictement croissante : le modèle prévoit une augmentation continue du nombre de personnes équipées.

Question 5. Déterminer à partir de quelle année le nombre de personnes équipées dépassera 120 000, soit 120 milliers, et expliquer la méthode employée.

1. Résoudre $f(t) > 120$ revient à résoudre $\frac{450}{1+7e^{-0{,}05t}} > 120$. Comme le dénominateur est positif, cela équivaut à $e^{-0{,}05t} < \frac{11}{28}$.
2. En prenant le logarithme, on obtient $t > \frac{\ln(28/11)}{0{,}05} \approx 18{,}69$.
3. Le premier rang annuel entier satisfaisant cette inégalité est 19, soit l'année 2032.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Le seuil de 120 000 personnes sera dépassé à partir de 2032, premier rang annuel entier supérieur à 18,69 ans après 2013.

2. Approvisionnement, pannes et qualité de l'embouteillement

Une machine d'usine embouteille de l'eau à partir d'un réservoir et d'une file de bouteilles vides. Les trois parties indépendantes étudient les défauts d'approvisionnement, le nombre de jours de panne sur 200 jours et la conformité du volume moyen des bouteilles remplies.

Partie A - Défaut d'approvisionnement

Question 1. Associer chacune des quatre phrases du tableau de gauche à l'information correspondante du tableau de droite : probabilité que la file ne se vide pas dans la journée, événement où la file est vide mais pas le réservoir, probabilité que les deux soient vides au moins une fois, et probabilité d'un défaut d'approvisionnement. Écrire les numéros et lettres correspondants, sans justification.

Phrase	Correspondance
1	E
2	C
3	F
4	D

Pour la phrase 1, on prend le complément de l'événement A. Pour la phrase 2, la file est vide mais le réservoir ne l'est pas, soit $A \cap \overline{B}$. L'indépendance donne $P(A \cap B) = 0{,}03 \times 0{,}02 = 0{,}0006$, correspondant à la phrase 3. Enfin, le défaut d'approvisionnement est l'événement $A \cup B$, de probabilité $0{,}03 + 0{,}02 - 0{,}0006 = 0{,}0494$, soit 0,05 dans le tableau.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Correspondances : 1-E, 2-C, 3-F et 4-D, selon les événements et probabilités du tableau.

Partie B - Pannes de la machine à embouteiller

Question 1. La machine peut tomber en panne chaque jour avec une probabilité de 0,025, indépendamment des autres jours. Donner, sans justification, la loi de probabilité de X, le nombre de jours de panne sur une période de 200 jours consécutifs, et préciser ses paramètres.

Pour chaque jour, il n'y a que deux issues : la machine tombe en panne, avec la probabilité $0{,}025$, ou elle ne tombe pas en panne. Les événements de panne sont indépendants d'un jour à l'autre. Le nombre de jours de panne sur les 200 jours est donc le nombre de succès de 200 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. Il suit une loi binomiale de paramètres 200 et 0,025.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La variable X, nombre de jours de panne sur 200 jours, suit la loi binomiale $\mathcal{B}(200\,;\,0{,}025)$.

Question 2.a. **Sachant que la loi de X est approchée par une loi de Poisson de paramètre λ, justifier que λ = 5.**

La loi binomiale de paramètres $n = 200$ et $p = 0{,}025$ est approchée par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = np$. On multiplie donc le nombre de jours observés par la probabilité quotidienne de panne : $\lambda = 200 \times 0{,}025 = 5$. Le paramètre de la loi de Poisson utilisée pour approcher le nombre de pannes est ainsi égal à 5.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Le paramètre de la loi de Poisson approchant le nombre de pannes vaut $\lambda = 200 \times 0{,}025 = 5$.

Question 2.b. **Pour une variable aléatoire Y suivant la loi de Poisson de paramètre 5, donner la valeur de P(Y ≤ 10), arrondie à 10^{-3}.**

Pour une loi de Poisson de paramètre 5, la probabilité cherchée est la somme des probabilités des valeurs entières de 0 à 10. On utilise la formule $P(Y = k) = e^{-5}\dfrac{5^k}{k!}$, donc $P(Y \leq 10) = \sum_{k=0}^{10} e^{-5}\dfrac{5^k}{k!} \approx 0{,}9863047$. L'arrondi au millième est 0,986.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Pour $Y \sim \mathcal{P}(5)$, la probabilité d'obtenir au plus 10 jours de panne est $P(Y \leq 10) \approx 0{,}986$.

Question 2.c. **Le graphique suggère que P(Y = 15) est nulle. À l'aide de la formule fournie pour les probabilités d'une loi de Poisson, déterminer si cette conjecture est vraie ou fausse et justifier.**

La formule fournie s'applique à tout entier $k \geq 1$. En prenant $k = 15$, on obtient $P(Y = 15) = \dfrac{5^{15}e^{-5}}{1 \times 2 \times \cdots \times 15}$. Le numérateur et le dénominateur sont strictement positifs, donc cette probabilité n'est pas nulle. Sa faible valeur explique qu'elle paraisse nulle sur le graphique, dont l'échelle ne permet pas de distinguer une barre aussi petite.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La conjecture est fausse : $P(Y = 15) = \dfrac{5^{15}e^{-5}}{15!} \approx 0{,}000157 > 0$, bien que cette valeur soit peu visible sur le graphique.

Partie C - Qualité de l'embouteillement

Question 1. À partir du tableau des volumes mesurés et des effectifs de l'échantillon de 100 bouteilles, déterminer à la calculatrice la moyenne et l'écart type de l'échantillon. Arrondir l'écart type à 10^{-2}.

Volume d'eau (cL)	Effectif
73	17
74	20
75	43
76	13
77	7

Les effectifs totalisent bien 100 bouteilles. La moyenne pondérée est $\overline{x} = 74{,}73$ cL. En divisant par 100 la somme des écarts à cette moyenne au carré, pondérés par les effectifs, on obtient une variance de $1{,}2171$. L'écart type est donc $\sqrt{1{,}2171} \approx 1{,}10$ cL au centième.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Pour les 100 bouteilles mesurées, la moyenne est $74{,}73$ cL et l'écart type, arrondi au centième, vaut $1{,}10$ cL.

Question 2.a. Sous l'hypothèse H_0 : $\mu = 75$, la moyenne Z d'un échantillon de 100 bouteilles suit une loi normale d'espérance 75 et d'écart type 0,11. Déterminer h tel que $P(75 - h \leq Z \leq 75 + h) \approx 0{,}95$, à 10^{-2} près.

Sous H_0, la moyenne Z suit une loi normale d'espérance 75 et d'écart type 0,11. L'intervalle central contenant 95 % des valeurs correspond approximativement à $[-1{,}96\,;\,1{,}96]$ pour la variable centrée réduite. La demi-largeur recherchée est alors $h = 1{,}96 \times 0{,}11 = 0{,}2156$, soit $0{,}22$ au centième.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> La demi-largeur de l'intervalle central de 95 % est $h \approx 0{,}22$ cL, arrondie au centième.

Question 2.b. Énoncer la règle de décision du test bilatéral de l'hypothèse H_0 : $\mu = 75$ contre H_1 : $\mu \neq 75$, au seuil de confiance de 95 %.

Au seuil de confiance de 95 %, l'intervalle central d'acceptation est centré sur 75 et sa demi-largeur arrondie est $h = 0{,}22$. Il s'écrit donc $[75 - 0{,}22\,;\,75 + 0{,}22] = [74{,}78\,;\,75{,}22]$. La moyenne observée de l'échantillon est comparée à cet intervalle : sa position détermine si l'hypothèse nulle est conservée ou rejetée.

- Si la moyenne observée appartient à l'intervalle, on ne rejette pas H_0.
- Sinon, on rejette H_0 au seuil de 5 %.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Ne pas rejeter H_0 si la moyenne observée appartient à $[74{,}78\,;\,75{,}22]$ cL ; rejeter H_0 dans le cas contraire.

Question 2.c. À partir des résultats de l'échantillon fourni, déterminer si l'hypothèse H_0 : $\mu = 75$ peut être acceptée selon la règle de décision du test.

La moyenne observée dans l'échantillon est $74{,}73$ cL. L'intervalle d'acceptation obtenu à la question précédente est $[74{,}78\,;\,75{,}22]$ cL. Comme $74{,}73 < 74{,}78$, cette moyenne est située sous la borne inférieure et n'appartient pas à l'intervalle. Selon la règle du test bilatéral au seuil de 5 %, on rejette donc l'hypothèse H_0.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La moyenne observée, $74{,}73$ cL, est hors de l'intervalle d'acceptation : on rejette H_0.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS Groupement D1, session 2022, code 22-MATGRD1, d'une durée de 2 heures. Le coefficient varie selon la spécialité, de 1 à 2. Les deux exercices, notés chacun sur 10 points, portent sur la modélisation de l'équipement médical par ajustement exponentiel et équation différentielle, puis sur une machine à embouteiller : probabilités, loi de Poisson et test statistique de conformité.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Le changement $y = \ln(N - 30)$ transforme le modèle exponentiel en relation affine entre y et le rang k.
- La solution de $y' + ay = c$ s'obtient en ajoutant une solution particulière constante à la solution générale de l'équation homogène.
- Pour n jours indépendants avec une probabilité de panne p, le nombre de pannes suit B(n, p) et peut être approché par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = np$.
- Un test bilatéral à 95 % compare la moyenne observée à l'intervalle central de probabilité 0,95 sous l'hypothèse nulle.

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter les unités : le nombre de personnes équipées est exprimé en milliers et le temps est compté depuis 2013.
- Pour l'année 2026, utiliser le rang ou le temps écoulé depuis 2013, soit 13 années.
- Pour un défaut correspondant à au moins un événement, calculer une union et tenir compte de l'indépendance des événements.
- Dans le test, comparer la moyenne de l'échantillon aux bornes de décision et conclure explicitement sur H_0.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment obtenir un modèle exponentiel à partir des données du tableau ?

Calculer d'abord $y = \ln(N - 30)$ pour chaque rang k, puis effectuer une régression linéaire de y en fonction de k. La droite obtenue permet de retrouver N en appliquant la fonction exponentielle.

Q : Comment choisir le paramètre de l'approximation de Poisson pour les pannes ?

Pour n essais indépendants de probabilité p, le paramètre de l'approximation est $\lambda = np$. Ici, $200 \times 0{,}025 = 5$, donc la loi binomiale peut être approchée par une loi de Poisson de paramètre 5.

Q : Comment organiser le temps dans cette épreuve de deux heures ?

L'épreuve comporte deux exercices de 10 points. Répartir le temps entre les deux, garder une marge pour les calculs et les conclusions, puis vérifier les arrondis, les unités et les réponses attendues.

Q : Que faut-il écrire pour conclure le test bilatéral à 95 % ?

Déterminer d'abord l'intervalle central de probabilité 0,95 sous H_0, puis comparer la moyenne observée à ses bornes. Conclure clairement si les données permettent de conserver H_0 ou conduisent à la rejeter.

Sujet officiel associé (PDF) : https://coursbtsccst.fr/assets/annales/bts-ccst/E2 - Mathématiques/2022/BTS CCST - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 3-Sujet.pdf
Ressources BTS Conseil et Commercialisation de Solutions Techniques : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.