Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 pour Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 pour Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. **Modélisation et étude du freinage d'un chariot** (12 questions) — **Page 3**

2. **Transformées de Laplace et réponse d'un système électrique** (9 questions) — **Page 7**

3. **Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ)** (Synthèse & Q&A Examen) — **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://coursbtsccst.fr/assets/annales/bts-ccst/E2 - Mathématiques/2022/BTS CCST - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

1. Modélisation et étude du freinage d'un chariot

Un chariot de fête foraine, initialement lancé à 20 m/s, est ralenti par un système de freinage et sa vitesse est modélisée par une fonction f. L'étude porte sur une équation différentielle, les variations et la limite de f, la distance parcourue et le développement limité au voisinage de zéro.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1. a. Résoudre l'équation différentielle homogène y' + 0,8y = 0 sur l'intervalle considéré.

Pour une équation homogène de la forme $y' + ay = 0$, les solutions sont $y(t) = ke^{-at}$, où k est une constante réelle. Ici, $a = 0,8$ et l'intervalle étudié est $[0; +\infty[$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 1. b. Vérifier que la fonction g définie par g(t) = 5 est solution de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.

1. La fonction constante $g(t) = 5$ vérifie $g'(t) = 0$.
2. Alors $g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4$. Elle satisfait donc l'équation différentielle donnée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g(t) = 5$ est bien une solution de $y' + 0,8y = 4$.

Question 1. c. Déduire des questions précédentes l'ensemble des solutions de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.

La fonction constante $g(t) = 5$ est une solution particulière de l'équation complète. Toute autre solution s'obtient en lui ajoutant une solution de l'équation homogène trouvée en 1.a. Ainsi, pour toute constante réelle k, les solutions sont de la forme :

$$y(t) = ke^{-0,8t} + 5.$$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,8t} + 5$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2. Déterminer la solution f de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4 qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.

Dans la solution générale, on impose la condition initiale :

1. $f(0) = ke^0 + 5 = 20$, donc $k + 5 = 20$.
2. Il vient $k = 20 - 5 = 15$.

On remplace alors la constante par cette valeur.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1. a. Démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5.

On utilise l'expression $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$. Lorsque t tend vers $+\infty$, l'exposant $-0,8t$ tend vers $-\infty$, donc $e^{-0,8t}$ tend vers 0. Le terme exponentiel disparaît à la limite et il reste le terme constant.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

Question 1. b. Déduire de cette limite une équation de l'asymptote à la courbe représentative C de f.

La limite de $f(t)$ en $+\infty$ est finie et égale à 5. La courbe C admet donc une asymptote horizontale dont l'ordonnée est cette limite :

$$y = 5.$$

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Asymptote horizontale : $y = 5$.

Question 2. À l'aide de l'expression donnée pour f'(t), dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.

Comme $e^{-0,8t} > 0$ pour tout $t \geq 0$, on a $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$. Ainsi, f est strictement décroissante. Elle part de $f(0) = 20$ et tend vers 5.

t	**0**	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	
$f(t)$	20	$\searrow 5$

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> f décroît strictement de 20 vers 5 sur $[0; +\infty[$.

Question 3. **Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.**

Pour tout instant fini $t \geq 0$, l'exponentielle est strictement positive. Par conséquent :

- $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5 > 5$;
- la vitesse ne peut donc jamais atteindre 0 selon ce modèle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non : le chariot ne s'arrête pas, sa vitesse reste supérieure à 5 m/s.

Question 4. a. **Vérifier que F(t) = -18,75e^(-0,8t) + 5t est une primitive de f sur [0 ; +∞[.**

On dérive chaque terme de $F(t) = -18,75e^{-0,8t} + 5t$:

$$F'(t) = (-18,75)(-0,8)e^{-0,8t} + 5 = 15e^{-0,8t} + 5 = f(t).$$

La dérivée de F est donc bien la fonction dont on cherche une primitive.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $F'(t) = f(t)$, donc F est une primitive de f.

Question 4. b. **Calculer la valeur exacte de la distance parcourue par le chariot entre les instants t0 = 0 et t1 = 1, puis donner une valeur arrondie au centimètre.**

La distance est l'intégrale de la vitesse entre 0 et 1. Avec la primitive donnée, $d = F(1) - F(0) = (-18,75e^{-0,8} + 5) - (-18,75)$. La valeur exacte est donc $23,75 - 18,75e^{-0,8}$ mètres. Son approximation est $15,3250817$ mètres, à arrondir au centimètre.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $d = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$ m, soit $15,33$ m au centimètre près.

Partie C - Étude locale

Question 1. **Choisir, parmi les propositions, le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.**

Le polynôme affiché par le logiciel est $20 - 12t + \frac{24}{5}t^2$. À l'ordre 2, le reste doit s'écrire $t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$. La proposition correcte est donc celle qui conserve les trois termes du polynôme et ce reste.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Troisième proposition : $20 - 12t + \frac{24}{5}t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$.

Question 2. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

La tangente au point d'abscisse 0 a pour équation $y = f(0) + f'(0)t$. Or $f(0) = 20$ et, d'après l'expression de la dérivée, $f'(0) = -12e^0 = -12$. La pente vaut donc -12 et l'ordonnée à l'origine vaut 20.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$T : y = 20 - 12t$.

2. Transformées de Laplace et réponse d'un système électrique

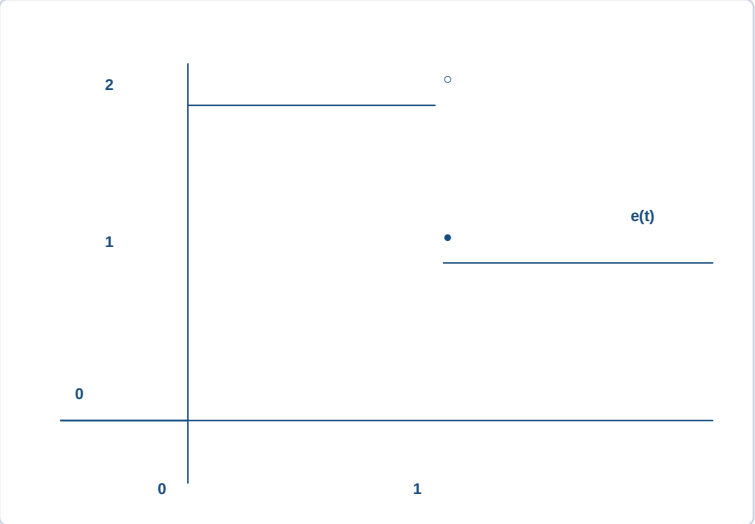
Un système électrique entrée-sortie causal reçoit le signal e(t) = 2U(t) - U(t - 1) et sa fonction de transfert est H(p) = 1/(p + 1). L'exercice demande de représenter le signal d'entrée, puis d'utiliser les transformées de Laplace pour déterminer et représenter le signal de sortie.

Partie A - Signal d'entrée

Question 1. Sur le document-réponse à rendre avec la copie, tracer la courbe représentative de la fonction e(t).

La fonction est causale et vaut 0 pour $t<0$. À partir de 0, $U(t)$ vaut 1 : le signal prend donc la valeur 2 jusqu'à l'instant 1 exclu. À $t=1$, le second échelon s'active et la valeur devient $2-1=1$. Le tracé distingue les valeurs aux deux côtés du saut en $t=1$.

Signal d'entrée e(t)



✓ RÉPONSE À RETENIR

$e(t)$ vaut 0 pour $t<0$, 2 sur $[0 ; 1[$, puis 1 pour $t\geq 1$.

Question 2. Déterminer la transformée de Laplace E(p) du signal d'entrée.

Par linéarité, on transforme séparément les deux termes de $e(t)=2U(t)-U(t-1)$. Le formulaire donne $\mathcal{L}\{U(t)\} = 1/p$. Pour le terme retardé, il donne $\mathcal{L}\{U(t-1)\} = e^{-p}/p$. On applique ensuite les coefficients 2 et −1, puis on peut regrouper les deux termes sur le même dénominateur.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$$E(p) = \frac{2}{p} - \frac{e^{-p}}{p} = \frac{2 - e^{-p}}{p}.$$

Partie B - Signal de sortie

Question 1. Démontrer l'expression de S(p) donnée dans le sujet à partir de la fonction de transfert et du signal d'entrée.

La relation du système est $S(p) = H(p)E(p)$. On y remplace $H(p)$ par $1/(p+1)$ et $E(p)$ par $2/p - e^{-p}/p$, obtenu à la question précédente. En distribuant le facteur $1/(p+1)$, on sépare le terme direct et le terme retardé. On retrouve ainsi exactement l'expression demandée dans le sujet.

$$S(p) = \frac{1}{p+1}\left(\frac{2}{p} - \frac{e^{-p}}{p}\right).$$

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$$S(p) = \frac{2}{p(p+1)} - \frac{e^{-p}}{p(p+1)}.$$

Question 2. Vérifier la décomposition en éléments simples 1/[p(p + 1)] = 1/p - 1/(p + 1).

On met les deux fractions du membre de droite au même dénominateur. Le numérateur devient $(p+1) - p = 1$, donc leur différence vaut $1/[p(p+1)]$. L'égalité est ainsi vérifiée pour les valeurs de p où les dénominateurs sont non nuls.

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} = \frac{(p+1) - p}{p(p+1)} = \frac{1}{p(p+1)}.$$

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

La décomposition demandée est vérifiée : $\dfrac{1}{p(p+1)} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p+1}$.

Question 3. Donner les transformées de Laplace inverses de 1/p, de 1/(p + 1), de e^(-p)/p et de e^(-p)/(p + 1), en utilisant le formulaire.

Les deux premières inverses viennent des transformées usuelles de l'échelon et de l'exponentielle. Le facteur e^{-p} applique ensuite un retard d'une unité : une fonction $g(t)$ devient $g(t-1)U(t-1)$. On obtient donc les deux expressions retardées ci-dessous, nulles avant $t = 1$.

Transformée	Transformée inverse
$1/p$	$U(t)$
$1/(p+1)$	$e^{-t}U(t)$
e^{-p}/p	$U(t-1)$
$e^{-p}/(p+1)$	$e^{-(t-1)}U(t-1)$

✓ RÉPONSE À RETENIR

Les inverses, dans l'ordre demandé, sont $U(t)$, $e^{-t}U(t)$, $U(t-1)$ et $e^{-(t-1)}U(t-1)$.

Question 4. Déduire des résultats précédents l'expression de s(t) sur l'intervalle [0 ; 1[.

On utilise la décomposition $1/[p(p+1)] = 1/p - 1/(p+1)$ dans l'expression de $S(p)$. Les termes multipliés par e^{-p} sont retardés d'une unité et s'annulent sur l'intervalle $[0;1[$, puisque $U(t-1) = 0$ avant 1. Il reste les deux inverses non retardées, avec le coefficient 2 :

$$s(t) = 2\big(U(t) - e^{-t}U(t)\big) = 2(1 - e^{-t}).$$

✓ RÉPONSE À RETENIR

Pour $0 \leq t < 1$, $s(t) = 2(1 - e^{-t})$.

Question 5. a. Sachant que s(t) = (e - 2)e^(-t) + 1 sur [1 ; +∞[, calculer s(1), d'abord sous forme exacte puis à un dixième près.

À $t = 1$, on évalue la formule donnée pour $t \geq 1$. Comme $e^{-1} = 1/e$, on simplifie l'expression en regroupant les termes constants :

$$s(1) = (e-2)e^{-1} + 1 = \frac{e-2}{e} + 1 = 2 - \frac{2}{e} \approx 1{,}2642.$$

À un dixième près, cette valeur s'arrondit à 1,3.

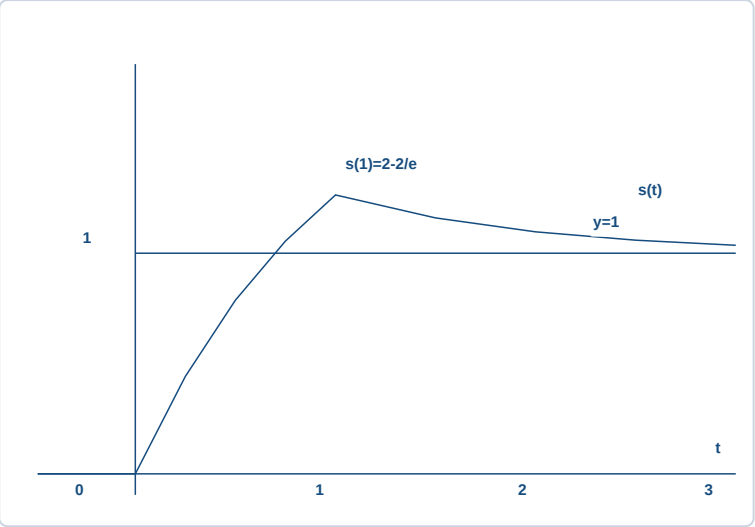
✓ RÉPONSE À RETENIR

Valeur exacte : $s(1) = 2 - \dfrac{2}{e}$. Au dixième près : $s(1) \approx 1{,}3$.

Question 5. b. Sur le document-réponse à rendre avec la copie, compléter la courbe représentative de la fonction s.

Pour $0 \leq t < 1$, on trace $s(t) = 2(1 - e^{-t})$, qui part de 0 et croît. À $t = 1$, les deux expressions donnent la même valeur $2 - 2/e$, soit environ 1,264. Pour $t \geq 1$, la formule donnée décroît vers 1. La courbe est donc continue, atteint son maximum en 1 et admet l'asymptote horizontale $y = 1$.

Courbe du signal de sortie s(t)



✓ RÉPONSE À RETENIR

La courbe part de $(0;0)$, atteint son maximum $(1;2-2/e)$, puis décroît vers l'asymptote horizontale $y=1$.

Question 5. c. Donner la limite de la fonction s(t) lorsque t tend vers +∞.

Pour $t \geq 1$, l'expression donnée est $s(t) = 1 + (e-2)e^{-t}$. Lorsque t tend vers $+\infty$, l'exponentielle e^{-t} tend vers 0. Le produit $(e-2)e^{-t}$ tend donc aussi vers 0, et la limite de $s(t)$ est la constante restante.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim\limits_{t \to +\infty} s(t) = 1$.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS, session 2022, code 22MATGRB2, durée deux heures. Le coefficient est de 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en Électrotechnique. Les exercices portent sur le freinage d'un chariot et la réponse d'un système électrique, évaluant équations différentielles, étude de fonctions, intégration et transformées de Laplace.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour y' + ay = 0, les solutions sont y(t) = ke^(-at) ; une solution particulière permet de résoudre l'équation différentielle complète.
- Si f(t) = Ae^(-kt) + L avec k > 0, alors f(t) tend vers L et la courbe admet l'asymptote horizontale y = L.
- La distance parcourue entre t0 et t1 est l'intégrale de la vitesse : d = ∫[t0,t1] f(t)dt.
- Un retard d'une unité dans le temps correspond au facteur e^(-p) en transformée de Laplace et à un décalage du signal d'une unité.

Points de vigilance & attentes du jury

- Après avoir établi la famille des solutions, appliquer la condition initiale pour déterminer la constante.
- Pour conclure sur l'arrêt du chariot, vérifier si la vitesse atteint zéro, et pas seulement si elle décroît ou tend vers une limite.
- Pour calculer une distance, évaluer la primitive aux deux bornes dans le bon ordre et respecter l'unité et l'arrondi demandés.
- Pour les signaux retardés, utiliser le facteur e^(-p) et tenir compte du changement de signal à t = 1.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment résoudre l'équation différentielle du freinage avec la condition initiale ?

Résolvez d'abord l'équation homogène, puis ajoutez une solution particulière de l'équation complète. La condition f(0) = 20 fixe la constante de la solution générale et permet d'obtenir l'expression de la vitesse.

Q : Comment décider si le chariot s'arrête à partir de sa vitesse ?

Un arrêt exige que la vitesse atteigne zéro à un instant du domaine étudié. Une vitesse qui décroît vers une limite strictement positive ne s'annule pas et ne correspond donc pas à un arrêt selon ce modèle.

Q : Comment organiser son temps dans cette épreuve de deux heures ?

L'épreuve comporte deux exercices de 10 points. Répartissez votre temps entre les deux, gardez une marge pour les tracés sur le document-réponse et vérifiez les unités, les valeurs exactes et les arrondis avant de rendre votre copie.

Q : Comment présenter les résultats numériques demandés dans le sujet ?

Pour la distance, donnez d'abord la valeur exacte, puis une valeur arrondie au centimètre. Pour s(1), fournissez la valeur exacte puis une valeur approchée au dixième, comme le demandent les consignes.

Sujet officiel associé (PDF) : https://coursbtsccst.fr/assets/annales/bts-ccst/E2 - Mathématiques/2022/BTS CCST - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf
Ressources BTS Conseil et Commercialisation de Solutions Techniques : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.