Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **2, sauf spécialité Traitement des matériaux : 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Freinage d'un chariot de fête foraine (12 questions) **Page 3**

2. Contrôle de conformité et durée de vie de produits industriels (9 questions) **Page 6**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 9**

Sujet officiel (PDF) : https://coursbtsccst.fr/assets/annales/bts-ccst/E2 - Mathématiques/2022/BTS CCST - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf

1. Freinage d'un chariot de fête foraine

Un chariot lancé à 20 m/s est ralenti par un système de freinage, et sa vitesse f(t) est étudiée en fonction du temps. L'exercice mobilise les équations différentielles, l'étude d'une fonction exponentielle, le calcul d'une distance et le développement limité au voisinage de zéro.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1. a. Résoudre l'équation différentielle homogène y' + 0,8y = 0.

Les solutions de l'équation homogène $y' + ay = 0$ sont $y(t) = Ce^{-at}$, où C est une constante réelle. Avec $a = 0,8$, on obtient la famille demandée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = Ce^{-0,8t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 1. b. Soit g la fonction définie par g(t) = 5. Vérifier que g est une solution de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.

Comme $g(t) = 5$, on a $g'(t) = 0$. Ainsi, $g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4$. L'égalité est vérifiée pour tout t.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Oui, $g(t) = 5$ est une solution de $y' + 0,8y = 4$.

Question 1. c. Déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.

Les solutions de l'équation avec second membre s'obtiennent en ajoutant la solution particulière $g(t) = 5$ aux solutions de l'équation homogène. On obtient donc une famille dépendant d'une constante réelle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = 5 + Ce^{-0,8t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 2. Déterminer la solution f de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4 qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.

La solution générale est $f(t) = 5 + Ce^{-0,8t}$. La condition $f(0) = 20$ donne $5 + C = 20$, puisque $e^0 = 1$. Ainsi, $C = 15$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1. a. Démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5.

On a $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$. Quand $t \to +\infty$, $-0,8t \to -\infty$, donc $e^{-0,8t} \to 0$. Le terme exponentiel tend vers 0 et le terme constant reste égal à 5.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

Question 1. b. Déduire de cette limite que la courbe C admet une asymptote et en donner une équation.

La limite de $f(t)$ en $+\infty$ étant finie et égale à 5, la courbe C admet une asymptote horizontale d'ordonnée 5.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Asymptote horizontale : $y = 5$.

Question 2. Sachant que f'(t) = -12e^(-0,8t), dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.

Pour tout $t \geq 0$, $e^{-0,8t} > 0$, donc $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$. La fonction est strictement décroissante, de $f(0) = 20$ vers sa limite 5.

t	**0**	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	
$f(t)$	20	$\searrow 5$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> f décroît de 20 vers 5 sur $[0; +\infty[$.

Question 3. Le système de freinage permet-il au chariot de s'arrêter ?

Pour tout instant fini $t \geq 0$, $15e^{-0,8t} > 0$, donc $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5 > 5$. La vitesse se rapproche de 5 sans atteindre 0 : le chariot ne s'arrête pas selon ce modèle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non : la vitesse tend vers $5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, sans atteindre 0.

Question 4. a. **La fonction F est définie sur [0 ; +∞[par F(t) = -18,75e^(-0,8t) + 5t. Vérifier que F est une primitive de f sur cet intervalle.**

En dérivant $F(t) = -18,75e^{-0,8t} + 5t$, on obtient $F'(t) = (-18,75)(-0,8)e^{-0,8t} + 5 = 15e^{-0,8t} + 5$. C'est précisément l'expression de $f(t)$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $F'(t) = f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$: F est une primitive de f.

Question 4. b. **La distance d parcourue entre les instants t_0 et t_1 est donnée par l'intégrale de f entre ces bornes. Calculer la valeur exacte de la distance parcourue entre $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$, puis donner une valeur arrondie au centimètre.**

La distance vaut $d = F(1) - F(0)$. Ainsi, $d = (-18,75e^{-0,8} + 5) - (-18,75) = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$. Cette expression est exacte ; l'arrondi au centimètre donne 15,33 m.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $d = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$ m $\approx 15,33$ m.

Partie C - Étude locale

Question 1. **Question à choix multiples avec une seule réponse exacte et sans justification demandée. Recopier l'expression correcte parmi les trois propositions pour le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro.**

Le logiciel donne la partie régulière $20 - 12t + \frac{24}{5}t^2$. Le développement limité à l'ordre 2 s'écrit avec un reste de la forme $t^2\varepsilon(t)$, où $\varepsilon(t) \to 0$ quand $t \to 0$. Il s'agit de la troisième proposition.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 20 - 12t + \frac{24}{5}t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\lim_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$: troisième proposition.

Question 2. **Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.**

L'équation de la tangente en 0 est $y = f(0) + f'(0)t$. On a $f(0) = 20$ et, d'après l'expression de la dérivée, $f'(0) = -12e^0 = -12$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $T : y = -12t + 20$.

2. Contrôle de conformité et durée de vie de produits industriels

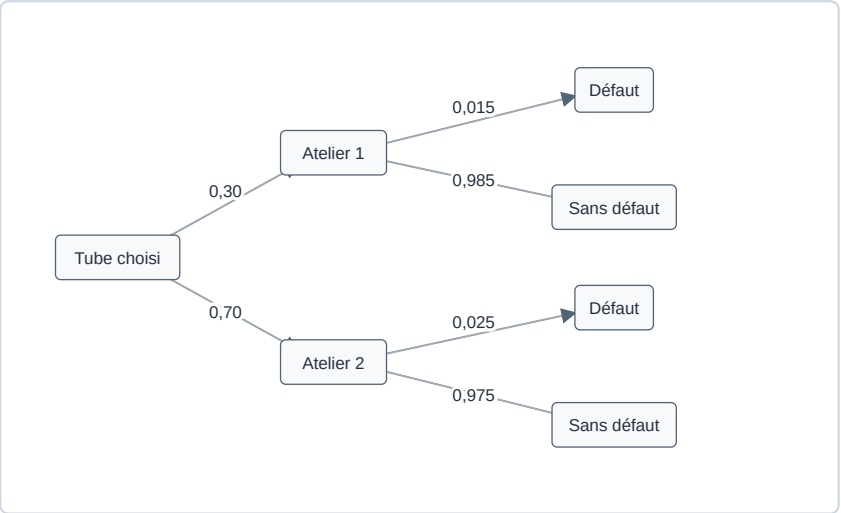
Une usine fabrique des tubes fluorescents dans deux ateliers et vérifie leur conformité par des tests de défaut. L'exercice étudie aussi la durée de fonctionnement des tubes, modélisée par une loi exponentielle, et l'estimation de la proportion de rivets conformes à partir d'un échantillon.

Partie A - Probabilités conditionnelles

Question 1. Réaliser un arbre pondéré décrivant la situation, en distinguant l'atelier de production et la présence ou l'absence d'un défaut.

Au premier niveau, l'arbre sépare les deux ateliers selon leur part de production. Au second niveau, chaque atelier se divise entre tubes avec défaut et tubes sans défaut. Les probabilités de défaut sont conditionnelles à l'atelier : 0,015 pour l'atelier 1 et 0,025 pour l'atelier 2. Les branches complémentaires valent respectivement 0,985 et 0,975. Chaque paire de branches issue d'un même nœud a une somme égale à 1.

Production et défauts des tubes



Les probabilités du second niveau sont conditionnelles à l'atelier.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Arbre pondéré : atelier 1 (0,30), atelier 2 (0,70), avec les probabilités conditionnelles indiquées.

Question 2. Calculer la probabilité P(A₁ ∩ D), où A₁ désigne l'événement « le tube provient de l'atelier 1 » et D l'événement « le tube présente un défaut ».

La probabilité recherchée correspond au chemin « atelier 1, puis défaut ». On multiplie donc la probabilité de provenir de l'atelier 1 par la probabilité conditionnelle d'avoir un défaut dans cet atelier : $P(A_1 \cap D) = P(A_1) \times P(D \mid A_1) = 0{,}30 \times 0{,}015 = 0{,}0045$. Cette probabilité est exprimée par rapport à l'ensemble des tubes produits par l'usine.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(A_1 \cap D) = 0{,}0045$, soit 0,45 %.

Question 3. Montrer que la probabilité qu'un tube choisi au hasard présente un défaut est P(D) = 0,022.

Un tube défectueux provient nécessairement de l'un des deux ateliers. Les deux chemins menant à l'événement D sont donc incompatibles et leurs probabilités s'additionnent. Pour l'atelier 1, la probabilité vaut $0{,}30 \times 0{,}015 = 0{,}0045$. Pour l'atelier 2, elle vaut $0{,}70 \times 0{,}025 = 0{,}0175$. Ainsi, $P(D) = 0{,}0045 + 0{,}0175 = 0{,}022$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(D) = 0{,}022$, soit 2,2 %.

Question 4. Sachant que le tube choisi ne présente pas de défaut, calculer la probabilité qu'il provienne de l'atelier 2.

La probabilité cherchée est conditionnelle à l'absence de défaut. Parmi toute la production, la probabilité d'obtenir un tube de l'atelier 2 sans défaut est $0{,}70 \times 0{,}975 = 0{,}6825$. La probabilité qu'un tube soit sans défaut vaut $1 - 0{,}022 = 0{,}978$. On divise alors ces valeurs : $P(A_2 \mid \overline{D}) = \dfrac{0{,}6825}{0{,}978} \approx 0{,}6979$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(A_2 \mid \overline{D}) \approx 0{,}698$, soit 69,8 %.

Partie B - Durée de vie des tubes fluorescents

Question 1. La durée de bon fonctionnement T suit une loi exponentielle de paramètre λ = 0,001. Déterminer son espérance E(T) et interpréter le résultat dans le contexte.

La page 6 du sujet indique le paramètre $\lambda = 0{,}0001$. Pour une loi exponentielle, l'espérance est l'inverse du paramètre : $E(T) = \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{1}{0{,}0001} = 10\,000$ heures. Cette espérance représente la durée moyenne de bon fonctionnement des tubes fluorescents. Elle ne signifie pas que chaque tube fonctionne exactement pendant cette durée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $E(T) = 10\,000$ heures, durée moyenne de bon fonctionnement.

Question 2. Calculer, en arrondissant au centième, la probabilité que la durée de bon fonctionnement d'un tube fluorescent prélevé soit inférieure à 8 000 heures.

Le sujet donne $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$ et $\lambda = 0{,}0001$. Ainsi, $P(T < 8\,000) = 1 - e^{-0{,}0001 \times 8\,000} = 1 - e^{-0{,}8} \approx 0{,}55067$. Une loi exponentielle étant continue, les probabilités associées à $T < 8\,000$ et à $T \leq 8\,000$ sont identiques. On arrondit au centième.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T < 8\,000) \approx 0{,}55$.

Question 3. Calculer, en arrondissant au centième, la probabilité que la durée de bon fonctionnement d'un tube fluorescent prélevé soit supérieure à 10 000 heures.

La probabilité qu'un tube fonctionne au-delà de t heures est le complément de la probabilité qu'il fonctionne au plus t heures. Avec la loi exponentielle, cela donne $P(T > t) = e^{-\lambda t}$. Pour $t = 10\,000$ et $\lambda = 0{,}0001$, on obtient $P(T > 10\,000) = e^{-0{,}0001 \times 10\,000} = e^{-1} \approx 0{,}36788$. On arrondit au centième.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T > 10\,000) \approx 0{,}37$.

Partie C - Intervalle de confiance

Question 1. Dans un échantillon de 1 000 rivets, 975 sont conformes. Donner une estimation ponctuelle f de la proportion inconnue p de rivets conformes dans l'ensemble de la production.

L'estimation ponctuelle de la proportion inconnue est la fréquence de rivets conformes observée dans l'échantillon. Sur 1 000 rivets, 975 sont conformes, donc $f = \dfrac{975}{1\,000} = 0{,}975$. On estime ainsi à 0,975 la proportion de rivets conformes dans l'ensemble de la production, soit 97,5 %.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f = 0{,}975$, soit 97,5 %.

Question 2. La fréquence F des rivets conformes dans un échantillon de 1 000 rivets suit la loi normale indiquée dans l'énoncé, et la formule de l'intervalle de confiance à 95 % est fournie. Déterminer un intervalle de confiance centré sur f pour p et arrondir ses bornes au millième.

On utilise la formule fournie avec $f = 0{,}975$ et $n = 1\,000$. La marge d'erreur vaut $1{,}96\sqrt{\dfrac{0{,}975(1-0{,}975)}{1\,000}} \approx 0{,}009677$. Les bornes sont donc $0{,}975 - 0{,}009677 \approx 0{,}965323$ et $0{,}975 + 0{,}009677 \approx 0{,}984677$. Après arrondi au millième, l'intervalle est $[0{,}965\ ;\ 0{,}985]$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Intervalle de confiance à 95 % : $[0{,}965\ ;\ 0{,}985]$.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS, session 2022, code 22MATGRB1, durée de 2 heures, coefficient 2 sauf en Traitement des matériaux où il vaut 3. Elle porte sur le freinage d'un chariot et la production de tubes fluorescents, avec un contrôle de conformité et des rivets. Les compétences évaluées comprennent équations différentielles, fonctions, intégrales, probabilités, loi exponentielle et intervalle de confiance.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- La solution générale de y' + ay = 0 est y(t) = ke^(-at).
- Pour une loi exponentielle de paramètre λ, P(T ≤ t) = 1 - e^(-λt) et E(T) = 1/λ.
- Une probabilité conditionnelle se lit sur une branche d'arbre pondéré, puis les probabilités conjointes se calculent par produit.
- Pour l'intervalle de confiance à 95 % fourni, utiliser f ± 1,96√(f(1-f)/n).

Points de vigilance & attentes du jury

- Appliquer la condition initiale pour déterminer la solution particulière de l'équation différentielle.
- Distinguer la limite de f, l'équation de l'asymptote et la conclusion sur l'arrêt du chariot.
- Placer les probabilités conditionnelles sur les branches de l'arbre et vérifier les probabilités totales.
- Respecter les unités et les arrondis demandés, notamment pour la distance, les probabilités et l'intervalle.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment calculer une distance à partir de la vitesse du chariot ?

La distance parcourue entre deux instants est l'intégrale de la vitesse sur cet intervalle. Si une primitive F de f est connue, on calcule $F(t_1) - F(t_0)$, puis on arrondit le résultat au centimètre comme demandé.

Q : Comment choisir la formule adaptée à une durée de vie exponentielle ?

Pour T de paramètre λ, la probabilité de fonctionner au plus t heures est 1 - e^(-λt), tandis que la probabilité de dépasser t heures est e^(-λt). L'espérance de la durée de fonctionnement est 1/λ.

Q : Comment organiser les deux heures d'épreuve ?

Les trois parties de chaque exercice peuvent être traitées indépendamment. Répartissez le temps entre les deux exercices de 10 points, commencez par les questions accessibles et gardez quelques minutes pour contrôler les calculs et les arrondis.

Q : Quelle précision faut-il respecter pour l'intervalle de confiance ?

La formule de l'énoncé utilise le niveau de confiance de 95 %. Prenez la fréquence observée dans l'échantillon de 1 000 rivets, calculez les deux bornes et arrondissez chacune au millième.

Sujet officiel associé (PDF) : https://coursbtsccst.fr/assets/annales/bts-ccst/E2 - Mathématiques/2022/BTS CCST - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf
Ressources BTS Conseil et Commercialisation de Solutions Techniques : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.